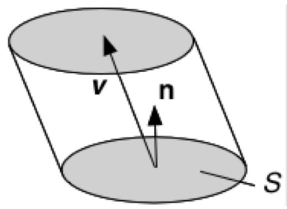
力学ICD演習解答例
演習3

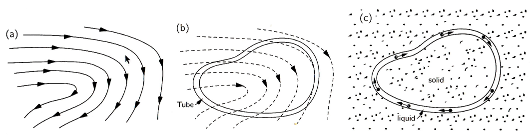
1. 一様な流速 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ m/sで運動する流体があったとする。図のように、この中に任意の円形の面（面積S m²）を考える。この面を単位時間に貫く流体の体積 V m³ は $V = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}$ と流速ベクトルと面積ベクトルのスカラー積になることを示せ。ただし、$\mathbf{n}$ を面に垂直な単位ベクトルとしたとき、面積ベクトル $\mathbf{S}$ は$\mathbf{S} = (S\,\mathbf{n})$で定義される。（$S \equiv |\mathbf{S}|$）



(解答例) t=0にSの場所にいた流体は、t=1 sec の時にはvだけ一斉に移動し右図の傾いた円柱の上蓋の位置まで来ている。よって、単位時間に貫く流体の体積Vは、右図にある傾いた円柱の体積に等しい（ただし、流体は非圧縮性（縮んだり伸びたりしない）とする）。傾いた円柱の体積(V)は底面積(S)と高さ(h)の積になる。ところで、底面積に垂直な方向の単位ベクトルを**n**とすると、hは右図より**v**ベクトルの**n**への射影となる。すなわち、h=**v**・**n** なる内積で求まる。よって、V= h S = (**v**・**n**) S= **v**・(**n** S)=**v**・ **S**. ここで、**S** =(S **n**) は「**面積ベクトル**」と呼び、向きはSに垂直方向で大きさは面積の値を持つベクトルと定義される。

2. 以下の図は、流体の流速の場　（各点で流体の速度を描いたベクトル場。図では、その接線方向をつないで「力線」の形で書いてある）(a) において、式(3-17)の積分 Γ （循環積分）

$$\Gamma \equiv \oint_{(C)} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\,\mathbf{r} \qquad (3\text{-}22)$$



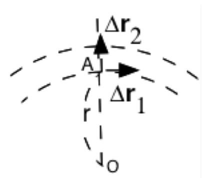
が「この場において渦があるかどうか」の判定に使えることを説明したものである（Feynman物理学　第２巻より転載）。$\Gamma \neq 0$ なら渦がある場であり、$\Gamma = 0$ ならば渦なし場となる。この図の英文キャプションを読んで、このことを簡単に説明せよ。

Fig. 1–4.(a) The velocity field in a liquid. Imagine a tube of uniform cross section that follows an arbitrary closed curve as in (b). If the liquid were suddenly frozen everywhere except inside the tube, the liquid in the tube would circulate as shown in (c).

（解答例）閉曲線に沿った仮想的な管（(b)図）の中以外で、この流体が瞬時に凍結したとする。この時、管の中に循環する流体が残れば、元々の場（(a)図）に渦があったと言える。管の中に循環する流体が残るかどうかを判定するには、式(3-22)を計算すれば良い。なぜなら、管の経路に沿った変位ベクトル**dr**方向へ残る流速ベクトルの成分は、流速ベクトルの**dr**方向への射影成分なので、**v**・**dr**と書けるからである。経路に沿ってこれを足し合わせれば管の中に残った流体の正味の流れになる（もちろん、反対方向に流れる成分もあるかもしれない。トータルで０であれば渦無しで、０でなければ正味、渦があったと言える）。これは(3-22)式の循環積分そのものである。

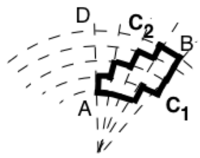
（参考）英文全訳：ある液体の速度の場。(b)のような任意の閉曲線に沿う一様な断面積を持つ管を思い浮べよう。もし、その液体が突然、管の内部以外、至る所で凍結したとすると、管の中の液体は(c)のように循環し始めるだろう。

3. 中心力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ が保存力であることを以下の手順で証明せよ。



(1) 右上図のように、中心力場の中心０から距離rだけ離れたA点を出発点とし、半径 r の円周上に$\Delta\mathbf{r}_1$だけ進んだ時の仕事と、それとは垂直に動径方向に$\Delta\mathbf{r}_2$だけ進んだ時の仕事をそれぞれ求めよ。ただし、$\Delta\mathbf{r}_1, \Delta\mathbf{r}_2$は十分小さく、その移動の間、力は変化しないとする。

（解答例）$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$なので、その力の向きは動径方向となる。よって、$\Delta\mathbf{r}_1$を進むときは$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \perp \Delta\mathbf{r}_1$となるから、その時の仕事$\Delta W_1 = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{r}_1 = 0$. 一方、$\Delta\mathbf{r}_2$を進むときは$\mathbf{r} // \Delta\mathbf{r}_2$なので$\mathbf{F}(\mathbf{r}) // \Delta\mathbf{r}_2$となるから、その時の仕事$\Delta W_2 = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{r}_2 = f(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r} \cdot \Delta\mathbf{r}_2 = f(r)\,|\Delta\mathbf{r}_2|$



(2)右下図のようにA点からＢ点まで異なる二つの経路、C_1とC_2で仕事を計算する。この二つの仕事が同じ値になり、その値はA点からＤ点まで動径方向に進んだ経路の仕事に等しくなることを示せ。ただし、経路は力の中心０を中心として動径方向と円周方向の組み合わせになっている。

（解答例）設問(1)の結果より、動径方向に進む時だけ仕事はゼロでない値を持つ。C_1の経路もC_2の経路も動径方向のステップは同じ４つであり、AからDに動径方向に進んだ場合（これも４ステップなので）と同じ仕事となる。

(3) 上の結果をもとにして、中心力の場では経路によらず２点間の仕事が決まる（保存力の場）ことを導きなさい。

（解答例）(2)の図で $A \to B$ の任意の経路があったとする。これらの経路を(2)のような動径方向と円周方向の微小区間に分割した形で近似する。ここでも、動径方向のステップ数が等しくなるのでそれらの仕事の近似値は、経路によらず同じ値

になる。次に、その区間$|\Delta \mathbf{r}| \to 0$ の極限をとると、正しく経路に沿った仕事の計算値になるが、仕事の値は経路によらず同じ値になる。この値は、(2)の図で$A \to D$の動径方向に進んだ時の線積分で求めた仕事と同じ値になる。